Integrante 1: Ana María Espinosa Código: 201425031 Sección: 25

Integrante 2: Jahnk Saeed Romero Código: 201316807 Sección: 25

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Numeral** |  | **Puntos** | | **1** | **a.** | /4 | | **b.** | /1 | | **c.** | /1 | | **d.** | /1 | | **e.** | /2 | | **f.** | /2 | | **g.** | /2 | | **h.** | /1 | | **i.** | /1 | | **j.** | /2 | | **k.** | /2 | | **l.** | /3 | | **2** | **a.** | /1 | | **b.** | /1 | | **c.** | /1 | | **d.** | /2 | | **e.** | /2 | | **f.** | /2 | | **g.** | /2 | | **h.** | /3 | | **i.** | /2 | | **j.** | /3 | | **k.** | /3 | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **3** | **a.** | /1 | | **b.** | /1 | | **c.** | /2 | | **d.** | /3 | | **e.** | /4 | | **f.** | /1 | | **4** | **a.** | /1 | | **b.** | /3 | | **c.** | /3 | | **d.** | /3 | | **e.** | /2 | | **f.** | /4 | | **5** | **a.** | /3 | | **b.** | /3 | | **c.** | /5 | | **d.** | /3 | | **6** | **a.** | /5 | | **b.** | /3 | | **c.** | /2 | | **d.** | /2 | | **e.** | /2 | |

|  |  |
| --- | --- |
| **TOTAL** | /100 |
|  |  |
| **NOTA** | **/5** |

**Punto 1**

Un lavadero de carros de la ciudad ha decidido realizar la compra de una novedosa máquina de autolavado de vehículos con el fin de poder atender el aumento de la demanda de su servicio. Esta nueva máquina tiene la capacidad de lavar 5 vehículos de manera simultánea cada hora. Debido a la prisa con la que se instaló esta nueva máquina se presentaron errores en su calibración y, como consecuencia, cada uno de los vehículos que ingresan para ser lavados por esta máquina tiene una probabilidad de 0.55 de ser lavados correctamente. Cuando un vehículo no es lavado correctamente por la máquina, el personal del lavadero realiza una inspección/corrección en la que, con probabilidad de 0.80, el vehículo debe ingresar nuevamente a la máquina para ser lavado.

Para el administrador del lugar, las siguientes dos variables son de especial interés: en primer lugar, el número de vehículos lavados correctamente por la máquina entre los cinco vehículos que ingresan a ser lavados cada hora (X); y en segundo lugar, el número de vehículos que son agendados para un nuevo lavado entre los vehículos que no fueron lavados correctamente por la máquina en la hora anterior (Y).

Con base en lo anterior responda:

1. **(4 puntos)** Construya la función de probabilidad conjunta de las variables X y Y. No olvide mostrar su procedimiento.
2. **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que, durante una hora particular, el número de vehículos lavados correctamente sea superior al número de vehículos que son agendados a un nuevo lavado?

1. **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que, durante una hora particular, el número de vehículos que presentaron errores en el lavado y que no necesitaron ingresar de nuevo a la máquina sea exactamente igual a 2?

1. **(1 punto)** Halle la función de probabilidad acumulada conjunta de las variables X y Y.

1. **(2 puntos)** Halle las funciones de probabilidad marginal de X y Y.

1. **(2 puntos)** ¿Cuál es el valor esperado del número de vehículos que son lavados correctamente por la máquina? ¿Cuál es su desviación estándar?

1. **(2 puntos)** ¿Cuál es el valor esperado del número de vehículos que son agendados para un nuevo lavado? ¿Cuál es su desviación estándar?

1. **(1 punto)** ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

1. **(1 punto)** Calcule la covarianza y el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias X y Y.

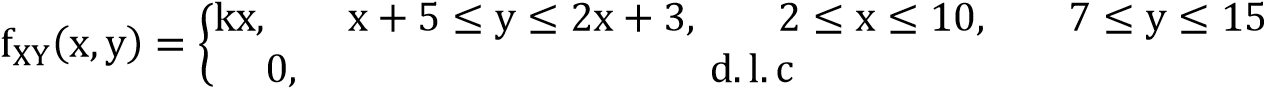
1. **(2 puntos)** Si se sabe que solo tres vehículos fueron lavados correctamente durante una hora particular, ¿cuál es la probabilidad de que dos vehículos deban ser agendados para un nuevo lavado?

1. **(2 puntos)** Si se sabe que hubo solo un vehículo inspeccionado/corregido que no requirió ser lavado nuevamente por la máquina, ¿cuál es la probabilidad de que haya habido dos o más vehículos lavados correctamente por la máquina?

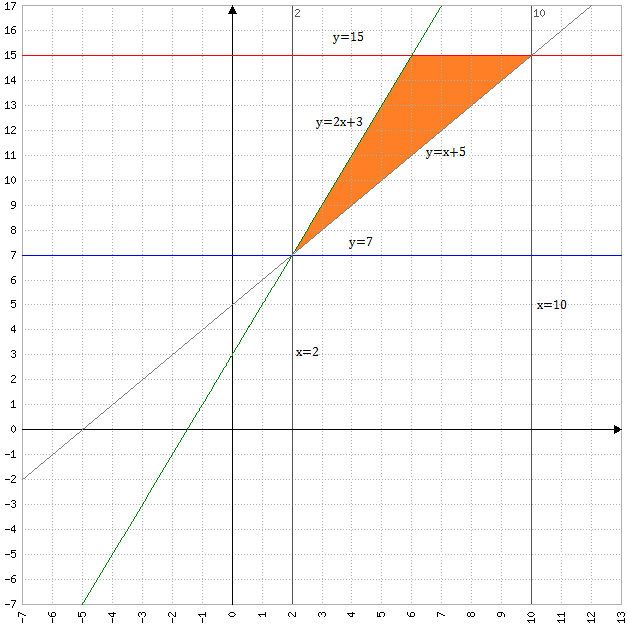
1. **(3 puntos)** Si se sabe que solo 1 vehículo tuvo que ser agendado para un nuevo lavado, ¿cuál es el número esperado de vehículos lavados correctamente por la máquina durante esta hora?

**Punto 2**

*IronFlower* es una empresa floricultora colombiana encargada del cultivo y venta de hortensias en Bogotá. Se sabe que el costo de cultivar una unidad de estas flores se puede modelar como una variable aleatoria X, en miles de pesos; y que el precio de venta se puede representar como una variable aleatoria Y, también en miles de pesos. El mercado floricultor encargado del cultivo y venta de este tipo de flores ha contratado una importante firma de consultoría con el objetivo de conocer el comportamiento y la relación de las dos variables mencionadas anteriormente. Tras la realización de este estudio, la firma consultora ha podido establecer que la función de probabilidad conjunta de X y Y es la siguiente:



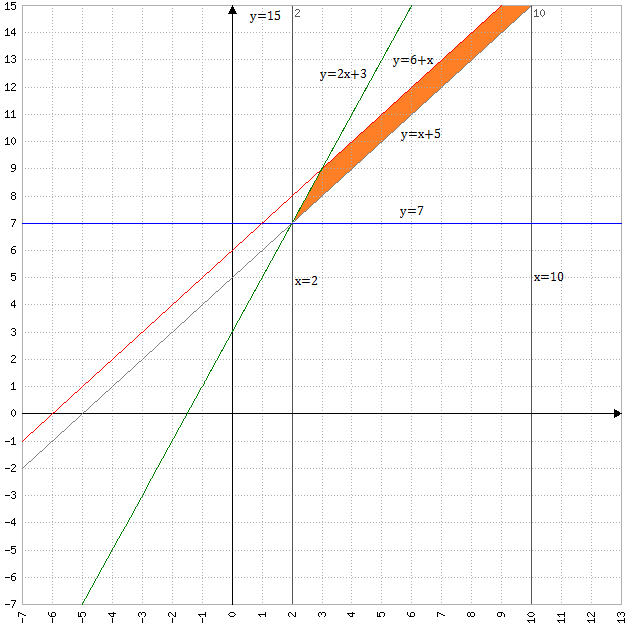
1. **(1 punto)** Encuentre el valor de la constante k para que la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y sea válida.



Para encontrar k:

Debido al gran éxito que *IronFlower* tuvo tras el día de San Valentín, el dueño desea conocer el comportamiento del negocio a través de varios indicadores.

1. **(1 punto)** Principalmente, si se define la utilidad unitaria como el precio de venta menos el costo de cultivar una hortensia, desea saber cuál es la probabilidad de obtener una utilidad unitaria inferior a $6.000 COP, caso en el que no se podrían cubrir los costos fijos de la compañía.



1. **(1 punto)** Adicionalmente, desea saber cuál es el valor esperado de la utilidad unitaria.

1. **(2 puntos)** Determine la función de densidad de probabilidad marginal de la variable aleatoria X, que representa el costo unitario de cultivar una hortensia.

1. **(2 puntos)** Calcule el valor esperado y la desviación estándar del costo unitario de cultivar una hortensia. Interprete el valor esperado.

Este valor esperado se puede interpretar al saber que el costo de cultivar una de estas flores en 6444 pesos.

1. **(2 puntos)** Determine la función de densidad de probabilidad marginal de la variable aleatoria Y, que representa el costo unitario de venta de una hortensia.

1. **(2 puntos)** Calcule el valor esperado y la desviación estándar del precio unitario de venta de una hortensia. Interprete el valor esperado.

Este valor esperado se puede interpretar como el precio de venta que tiene una de estas flores.

1. **(3 puntos)** Determine e interprete la correlación entre el costo unitario de cultivar una hortensia y el precio de venta. Además, establezca si son variables aleatorias independientes.

1. **(2 puntos)** Si se sabe que el costo unitario de cultivar una hortensia es de $6.500 COP, calcule el valor esperado del precio de venta unitario.

1. **(3 puntos)** Si se sabe que el costo unitario de cultivar una hortensia es de $6.500 COP, calcule el valor esperado de la utilidad unitaria.

1. **(3 puntos)** Si se sabe que el costo unitario se encuentra entre $6.000 y $7.000 COP, calcule el valor esperado del precio de venta.

**Punto 3**

Para la EuroCopa que se llevará a cabo este año en Francia, los países clasificados han venido convocando a sus estrellas para los procesos de microciclos y así definir los 23 jugadores que participarán en la cita continental. En el caso de Francia, que se debe enfrentar a Rumania Albania y Suiza, el director técnico convocó, entre otros, a sus cobradores de penales para iniciar el entrenamiento correspondiente.

Durante los entrenamientos fue posible determinar que Karim Benzema (B), Paul Pogba (P) y Olivier Giroud (G) anotan un gol desde el punto de penal con una probabilidad de 0.8 y, que esta probabilidad es independiente entre ellos.

1. **(1 punto)** Especifique la definición, distribución y parámetros de las variables aleatorias B, P y G que modelan el éxito (gol desde el punto penal) de cada uno de los cobradores. Adicionalmente, presente la función generadora de momentos de cada una las variables aleatorias.

Como parte de los ejercicios de rutina, el director técnico definió, para cada jugador, una variable aleatoria que representa el número de goles desde el punto de penal que el jugador puede anotar en 5 oportunidades.

1. **(1 punto)** Especifique la definición, distribución y parámetros de las variables aleatorias que modelan el número de goles que cada cobrador anota en las 5 oportunidades. Adicionalmente, presente la función generadora de momentos de cada una las variables aleatorias.

1. **(2 puntos)** Utilizando la función generadora de momentos, demuestre que la suma de 5 variables aleatorias B tiene la misma distribución que la indicada en el literal b, en el caso de Benzema.

1. **(3 puntos)** Teniendo en cuenta que la variable de desempeño W en la que está interesado el director técnico es la suma de los goles que cada cobrador anota en las 5 oportunidades y, utilizando las propiedades de las funciones generadoras de momentos, demuestre que la distribución de probabilidad de W es binomial. No olvide determinar los parámetros de la variable aleatoria W.

Otro de los ejercicios de rutina definidos por el director técnico consiste en permitir un número indefinido de cobros de penal a cada jugador hasta que anoten su primer gol.

1. **(4 puntos)** Utilizando las propiedades de las funciones generadoras de momentos, determine la distribución y los parámetros de la variable aleatoria que modela el número total de cobros realizados por los tres jugadores.

1. **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que se deban realizar más de 20 cobros de penal hasta que los 3 jugadores anoten su primer gol.

**Punto 4**

Un gremio de campesinos se encuentra evaluando la rentabilidad que se obtiene si se destina un terreno al cultivo de papa. Para ello, se sabe que la producción de papa en toneladas por cosecha, en una hectárea cultivada de este terreno, es una variable aleatoria triangular con parámetros (17, 22, y 32). La producción total de papa de cada hectárea cultivada es independiente a las demás hectáreas.

1. **(1 punto)** Determine la probabilidad de que la producción total de una hectárea cultivada sea superior a 23 toneladas

1. **(3 puntos)** Si se decide cultivar un terreno de 38 hectáreas, calcule la probabilidad de que el promedio de toneladas producidas por hectárea durante una cosecha sea superior a 23 toneladas. Comente este resultado con respecto al obtenido en el literal anterior.

1. **(3 puntos)** Si el gremio de campesinos se ha propuesto el objetivo de lograr una producción de al menos 815 toneladas durante la cosecha actual, ¿cuál debe ser el número mínimo de hectáreas que se deben cultivar de tal modo que la probabilidad de cumplir con el objetivo sea de por lo menos 0.9?

El gremio ha adquirido un segundo campo cuyas características son distintas a las descritas anteriormente. La producción de papa, en toneladas, de una hectárea cultivada en este nuevo campo es una variable aleatoria uniforme con valor mínimo de 20 toneladas y valor máximo de 28 toneladas.

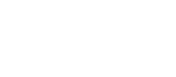
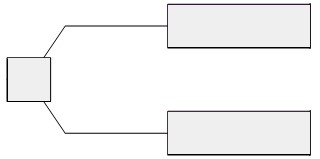
1. **(3 puntos)** Si se deciden cultivar 40 hectáreas en cada campo, indique cuál es la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  que representa la cantidad total de toneladas de papa cultivadas en los dos campos cultivados. Calcule el valor esperado de .

1. **(2 puntos)** Si se deciden cultivar 40 hectáreas en cada campo, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia entre los promedios de cada campo sea menor a 1 tonelada?

1. **(4 puntos)** Realice un modelo en Crystal Ball, para estimar la probabilidad del literal e. Realice 1000 iteraciones y presente la salida con la estimación de esta probabilidad.

**Punto 5**

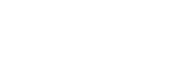
Un consultor especializado en finanzas ha realizado un análisis sobre los retornos esperados de las acciones de dos grupos empresariales: **Empresas A** y **Compañías B**. Entre sus resultados, encontró que el escenario futuro de los retornos de **Empresas A** y de **Compañías B** se modelan a través de las variables aleatorias X y Y, respectivamente. Una forma de representar el escenario futuro de los retornos de los dos grupos empresariales es el que se presenta en el siguiente diagrama.



Sube 2

0

%



Baja

2

0

%



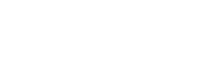
0.7

5

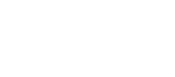
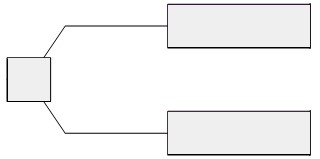


0.

25



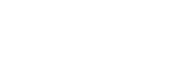
Empresas A



Sube

40

%



Baja

3

5

%



0.

6

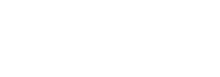
0



0.

4

0



Compañías B

De acuerdo con el diagrama, el retorno futuro de la acción de **Empresas A** será de x = 1.20 veces el retorno de la acción presente con una probabilidad de 0.75; y, con una probabilidad de 0.25, el retorno futuro de la acción de **Empresas A** será de x = 0.80 veces el retorno de la acción presente. Del mismo modo, el retorno futuro de la acción de **Compañías B** será de y = 1.40 veces el retorno de la acción presente con una probabilidad de 0.60 y, con una probabilidad de 0.40, el retorno futuro de la acción de **Compañías B** será y = 0.65 veces el retorno de la acción presente.

Adicionalmente, el consultor ha determinado que la covarianza entre el retorno futuro de los dos grupos empresariales es de -0.05.

1. **(3 puntos)** Calcule el retorno esperado, la varianza y la desviación de cada acción.
2. **(3 puntos)** Determine la correlación entre los retornos de ambas acciones. Interprete el signo de la correlación.

Suponga que en el mercado se ofrecen los siguientes cinco portafolios de inversión en los que se compran acciones de **Empresas A** y de **Compañías B**, en cada uno de los portafolios se invierte 100 dólares. La ganancia en cada uno de los portafolios está determinada por la multiplicación entre el retorno futuro y la cantidad de dinero invertida en cada grupo empresarial.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Opción  Portafolio | Inversión en X | Inversión en Y |
| Z1 | 10 | 90 |
| Z2 | 30 | 70 |
| Z3 | 50 | 50 |
| Z4 | 70 | 30 |
| Z5 | 90 | 10 |

1. **(5 puntos)** Determine el valor esperado y la desviación estándar de cada uno de los portafolios. Interprete sus resultados en términos del problema.

1. **(3 puntos)** Si el consultor financiero debe recomendar uno de los cinco portafolios de inversión, ¿cuál recomendaría? Explique su respuesta.

**Punto 6**

Lácticos *La Soyada*, ha decidido realizar un análisis probabilístico de su proceso de producción de productos derivados del frijol de soya. En particular, la compañía está interesada en analizar la etapa de pretratamiento de la materia prima, ya que constituye una fase crítica dentro del proceso.

El insumo principal de esta fase es el frijol de soya, que se procesa en cargas de 300 kilogramos en un reactor, cada carga que entra al reactor se procesa de manera independiente de las demás. El número de cargas que se procesa en un día particular se modela como una variable aleatoria uniforme con un mínimo de 60 cargas y un máximo de 70 cargas; por políticas de la compañía, se utilizan cargas completas y no fracciones. Cuando la carga se encuentra en el reactor se realiza un proceso de desactivación enzimática, este se encarga de remover una enzima presente en el frijol de soya, que lo hace no digerible y le brinda un mal sabor al producto terminado. Para el proceso de desactivación enzimática se debe ajustar la temperatura a 250 °F; sin embargo, el reactor con el que actualmente cuenta la compañía no permite realizar este ajuste apropiadamente, de modo que la temperatura con la que se procesan las cargas se comporta como una variable aleatoria normal con media 240°F y desviación estándar de 80°F. Una vez se procesa una carga de frijol de soya se obtiene una cantidad de soya procesada que se distribuye como una variable aleatoria normal con media de 150 kg y desviación estándar de 30 kg.

Si la temperatura durante el proceso de desactivación enzimática de una carga es superior a 260°F, se debe realizar una etapa de remoción enzimática con ácidos. La cantidad de enzima que se presenta en el procesamiento de cada carga, en kilos, se distribuye como una variable aleatoria triangular de parámetros (18, 55, 70). La cantidad de enzima es independiente de la cantidad de soya.

El gerente de *La Soyada* lo ha contratado a usted y a su equipo para analizar algunas variables relacionadas con la Ganancia Neta de la Operación. Para ello, se cuenta con la siguiente información:

* Existe un costo fijo asociado al funcionamiento de la planta por turno de $950.000 COP.  El costo en que se incurre por remover 1 kg de enzima es de $875 COP.
* Si se produce más de una tonelada de enzima, se debe realizar un lavado especializado a todos los equipos involucrados en el proceso, que tiene un costo adicional, en COP, que se puede modelar como una variable aleatoria con distribución triangular de parámetros ($300.000, $385.000, $500.000).
* El precio de venta por cada kilo de soya procesada es de $1.000 COP.

De acuerdo con la información anterior, de solución a los siguientes literales.

1. **(5 puntos)** Defina el modelo determinístico. Recuerde que debe precisar las variables aleatorias, los parámetros y las variables de desempeño.

Realice la simulación del proceso en Crystal Ball, utilizando 1000 iteraciones, y responda las siguientes preguntas:

1. **(3 puntos)** Realice un intervalo de confianza del 95% para la Ganancia Neta de la Operación, el número de kilos de encima producida y el costo asociado a la remoción de la misma. Adicionalmente, reporte la probabilidad de que la Ganancia Neta sea positiva.

El equipo de investigación y desarrollo sugiere realizar la compra de un nuevo reactor que tiene una tecnología especial de enfriamiento, cuya temperatura se comporta como una variable aleatoria uniforme entre 220 y 270 °F. La gerencia de la compañía ha establecido que este reactor solo se puede comprar si, en promedio, con la ayuda del mismo se puede generar una disminución de los costos de por lo menos $850.000 COP diarios, suficientes para cubrir el costo del mismo.

c. **(2 puntos)** Realice un intervalo de confianza del 95% para la Ganancia Neta de la Operación, el número de kilos de encima producida y el costo asociado a la remoción de la misma, utilizando el nuevo reactor.

d. (**2 puntos)** Determine si la compañía debería o no adquirir el nuevo reactor. Justifique su respuesta utilizando las estadísticas que reporta Cristal Ball.

e. **(2 puntos)** Utilizando el análisis de influencia de Cristal Ball, determine la influencia de la temperatura sobre el costo asociado a la remoción de las enzimas.